

**Контрольная работа по курсу**  
**"Методы дискретного анализа в организационных системах.**  
**Алгоритмический подход."**  
**Теория графов, 3 курс, МГУ, физический факультет,**  
**12 мая 2010 г.; срок сдачи: 19 мая 2010 г.**

**Вариант 1.**

1. Пусть  $G$  — простой граф с  $n$  вершинами, не содержащий треугольников (циклов длины три). Доказать, что  $G$  содержит не более  $\frac{n(n-1)}{2}$  рёбер, и привести пример, когда достигается верхняя граница.
2. Построить алгоритм нахождения  $n$  гамильтоновых циклов в полном графе  $K_{2n+1}$ , обладающих тем свойством, что никакие два из них не имеют общих рёбер.
3. Пусть  $R_n$  — число деревьев со множеством вершин  $V, |V| = n$ , и одной произвольно выбранной вершиной из  $V$  в качестве корня дерева.  
 $R_n(m)$  — число таких деревьев, у которых корень — вершина степени  $m$ .  
 Показать, что  $R_n = n^{n-1}$ .
4. Методом динамического программирования найти оптимальный раскрой выпуклого  $n$ -угольника на треугольники с помощью  $n-3$  непересекающихся диагоналей. Требуется найти раскрой минимальной суммарной стоимости.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 & 10 & 15 & 10 & 6 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 & 9 & 8 & 5 & 8 & 6 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & 17 & 4 & 8 & 14 & 8 \\ 10 & 16 & 0 & 0 & 0 & 8 & 5 & 7 & 16 \\ 15 & 9 & 17 & 0 & 0 & 0 & 5 & 8 & 10 \\ 10 & 8 & 14 & 8 & 0 & 0 & 0 & 12 & 6 \\ 6 & 5 & 8 & 5 & 5 & 0 & 0 & 0 & 17 \\ 9 & 8 & 4 & 7 & 8 & 12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 8 & 16 & 10 & 6 & 17 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Пусть  $p(n, m)$  — количество корневых деревьев с  $n$  раскрашенными с помощью  $m$  красок вершинами, среди которых нет двух смежных вершин одинаковой расцветки. Доказать, что  $p(1, m) = m$ ,  $p(2, m) = 2C_m^2$ .
6. Построить гамильтонов цикл минимальной стоимости обхода всех вершин

$$\begin{pmatrix} \infty & 4 & 8 & 10 & 15 & 10 & 6 & 9 & 1 \\ 6 & \infty & 7 & 16 & 9 & 8 & 12 & 8 & 6 \\ 8 & 5 & \infty & 6 & 17 & 4 & 4 & 14 & 8 \\ 10 & 16 & 3 & \infty & 7 & 8 & 5 & 8 & 16 \\ 15 & 9 & 17 & 5 & \infty & 8 & 5 & 6 & 10 \\ 10 & 8 & 14 & 8 & 3 & \infty & 5 & 12 & 16 \\ 6 & 5 & 8 & 5 & 5 & 3 & \infty & 6 & 17 \\ 9 & 8 & 4 & 7 & 8 & 12 & 4 & \infty & 3 \\ 5 & 6 & 8 & 16 & 10 & 6 & 17 & 5 & \infty \end{pmatrix}$$

7. Задача двух станков

	$1 \implies 2$					$2 \implies 1$				1	2		
$j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$p_j^1$	4	6	5	7	8	7	4	5	2	7	9		
$p_j^2$	5	4	3	5	7	4	6	2	3			4	6

$$\min_{\pi} C_{\max}(\pi)$$

**Контрольная работа по курсу**  
**"Методы дискретного анализа в организационных системах.**  
**Алгоритмический подход."**  
**Теория графов, 3 курс, МГУ, физический факультет,**  
**12 мая 2010 г.; срок сдачи: 19 мая 2010 г.**

**Вариант 2.**

1. Химические формулы парафинов представляют собой корневые деревья с двумя разными типами вершин, отличных от корня. Концевые вершины имеют степень "единица", а каждая из внутренних вершин имеет степень "четыре". (Речь идёт об атомах водорода и кислорода).

Доказать, что для парафинового дерева с  $p$  вершинами, из которых  $p_1$  – концевые, а  $p_4$  – внутренние, и  $e$  ребрами имеют место соотношения:

$$p_1 + p_4 = p; e = p - 1; p_1 + 4p_4 = 2e = 2p - 2.$$

Следовательно,

$$p_1 = 2p_4 + 2.$$

2. Каждая вершина дерева независимо от остальных окрашивается в один из  $m$  цветов. Пусть  $q(n, m)$  – количество раскрашенных корневых деревьев с  $n$  вершинами. Доказать, что  $q(1, m) = m$ ;  $q(2, m) = m + 2C_m^2$ .
3. Пусть  $R_n$  – число деревьев со множеством вершин  $V, |V| = n$ , и одной произвольно выбранной вершиной из  $V$  в качестве корня дерева.

$R_n(m)$  – число таких деревьев, у которых корень – вершина степени  $m$ .

Доказать, что  $R_n(1) = nR_{n-1}$ ;  $R_n(2) = \frac{n}{2!} \sum_{j=1}^{n-2} C_{n-1}^j R_j R_{n-1-j}$ .

4. Методом динамического программирования найти оптимальный раскрой выпуклого  $n$ -угольника на треугольники с помощью  $n-3$  непересекающихся диагоналей. Требуется найти раскрой минимальной суммарной стоимости.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 & 10 & 15 & 10 & 7 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 9 & 8 & 15 & 8 & 6 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 17 & 4 & 8 & 14 & 8 \\ 10 & 4 & 0 & 0 & 0 & 8 & 5 & 7 & 16 \\ 15 & 9 & 17 & 0 & 0 & 0 & 5 & 8 & 10 \\ 10 & 8 & 14 & 8 & 0 & 0 & 0 & 12 & 6 \\ 7 & 15 & 8 & 5 & 5 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 9 & 8 & 4 & 7 & 8 & 12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 8 & 16 & 10 & 6 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Пусть  $p(n, m)$  – количество корневых деревьев с  $n$  раскрашенными с помощью  $m$  красок вершинами, среди которых нет двух смежных вершин одинаковой расцветки. Доказать, что  $p(3, m) = 4C_m^2 + 9C_m^3$ .

6. Построить гамильтонов цикл минимальной стоимости обхода всех вершин

$$\begin{pmatrix} \infty & 4 & 8 & 6 & 4 & 10 & 6 & 9 & 1 \\ 6 & \infty & 7 & 16 & 19 & 8 & 12 & 8 & 6 \\ 8 & 5 & \infty & 6 & 7 & 4 & 4 & 9 & 8 \\ 10 & 16 & 3 & \infty & 7 & 8 & 5 & 8 & 13 \\ 13 & 9 & 12 & 5 & \infty & 8 & 5 & 6 & 10 \\ 10 & 8 & 14 & 8 & 3 & \infty & 5 & 15 & 16 \\ 6 & 5 & 8 & 5 & 5 & 3 & \infty & 6 & 13 \\ 9 & 8 & 4 & 7 & 8 & 12 & 4 & \infty & 3 \\ 5 & 6 & 8 & 16 & 10 & 6 & 6 & 5 & \infty \end{pmatrix}$$

7. Задача двух станков

	$1 \implies 2$					$2 \implies 1$				1	2		
$j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$p_j^1$	5	6	5	2	8	4	4	5	8	7	4		
$p_j^2$	7	2	6	4	2	7	6	5	3			7	2

$$\min_{\pi} C_{\max}(\pi)$$

**Контрольная работа по курсу**  
**"Методы дискретного анализа в организационных системах.**  
**Алгоритмический подход."**  
**Теория графов, 3 курс, МГУ, физический факультет,**  
**12 мая 2010 г.; срок сдачи: 19 мая 2010 г.**

**Вариант 3.**

1. Подсчитать число симметрических функций от  $n$  переменных.
2. Каждая вершина дерева независимо от остальных окрашивается в один из  $m$  цветов. Пусть  $q(n, m)$  — количество раскрашенных корневых деревьев с  $n$  вершинами. Доказать, что  $q(3, m) = 2m + 10C_m^2 + 9C_m^3$ .
3. Пусть  $R_n$  — число деревьев со множеством вершин  $V, |V| = n$ , и одной произвольно выбранной вершиной из  $V$  в качестве корня дерева.  
 $R_n(m)$  — число таких деревьев, у которых корень — вершина степени  $m$ .  
 Доказать, что  $m!R_n(m) = [n]_{m+1}m(n-1)^{n-m-2}$  или, что эквивалентно,  
 $R_n(m) = nC_{n-2}^{m-1}(n-1)^{n-1-m}$ .
4. Методом динамического программирования найти оптимальный раскрой выпуклого  $n$ -угольника на треугольники с помощью  $n-3$  непересекающихся диагоналей. Требуется найти раскрой минимальной суммарной стоимости.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 & 10 & 9 & 10 & 7 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 9 & 8 & 15 & 8 & 6 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 5 & 4 & 8 & 14 & 18 \\ 10 & 4 & 0 & 0 & 0 & 8 & 5 & 7 & 16 \\ 9 & 9 & 5 & 0 & 0 & 0 & 5 & 8 & 10 \\ 10 & 8 & 4 & 8 & 0 & 0 & 0 & 4 & 6 \\ 7 & 15 & 8 & 5 & 5 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 9 & 8 & 4 & 7 & 8 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 18 & 16 & 10 & 6 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Пусть  $p(n, m)$  — количество корневых деревьев с  $n$  раскрашенными с помощью  $m$  красок вершинами, среди которых нет двух смежных вершин одинаковой расцветки. Найти  $p(5, m)$ .
6. Построить гамильтонов цикл минимальной стоимости обхода всех вершин

$$\begin{pmatrix} \infty & 4 & 8 & 6 & 4 & 10 & 6 & 9 & 1 \\ 6 & \infty & 7 & 16 & 19 & 8 & 2 & 8 & 6 \\ 8 & 5 & \infty & 6 & 7 & 4 & 4 & 9 & 8 \\ 4 & 16 & 3 & \infty & 7 & 8 & 5 & 8 & 13 \\ 13 & 9 & 4 & 5 & \infty & 8 & 5 & 6 & 10 \\ 10 & 8 & 14 & 8 & 3 & \infty & 5 & 3 & 16 \\ 6 & 5 & 8 & 5 & 5 & 3 & \infty & 6 & 3 \\ 9 & 8 & 4 & 7 & 8 & 12 & 4 & \infty & 3 \\ 15 & 6 & 8 & 16 & 10 & 6 & 6 & 5 & \infty \end{pmatrix}$$

7. Задача двух станков

	$1 \implies 2$					$2 \implies 1$				1		2	
$j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$p_j^1$	4	6	5	5	8	4	4	5	3	2	4		
$p_j^2$	4	2	6	3	2	1	6	5	3			1	2

$$\min_{\pi} C_{\max}(\pi)$$

**Контрольная работа по курсу**  
**"Методы дискретного анализа в организационных системах.**  
**Алгоритмический подход."**  
**Теория графов, 3 курс, МГУ, физический факультет,**  
**12 мая 2010 г.; срок сдачи: 19 мая 2010 г.**

**Вариант 4.**

1. Пусть  $\Psi(n)$  – число штрихов Шеффера от  $n$  переменных. Доказать, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Psi(n)}{2^{2^n}} = \frac{1}{4}$ .
2. Каждая вершина дерева независимо от остальных окрашивается в один из  $m$  цветов. Пусть  $q(n, m)$  – количество раскрашенных корневых деревьев с  $n$  вершинами. Доказать, что  $q(4, m) = 4m + 44C_m^2 + 64C_m^4$ .
3. Доказать, что для числа  $T_n$  различных деревьев справедливо представление  $T_n = \sum_{m=1}^{n-1} T_n(m) = n^{n-2}$ , где  $T_n(m)$  – число различных деревьев, в которых корень является вершиной  $m$ -ой степени.
4. Методом динамического программирования найти оптимальный раскрой выпуклого  $n$ -угольника на треугольники с помощью  $n-3$  непересекающихся диагоналей. Требуется найти раскрой минимальной суммарной стоимости.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 & 10 & 9 & 10 & 7 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 14 & 9 & 8 & 15 & 8 & 6 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 5 & 14 & 8 & 14 & 18 \\ 10 & 14 & 0 & 0 & 0 & 8 & 5 & 7 & 16 \\ 9 & 9 & 5 & 0 & 0 & 0 & 5 & 8 & 10 \\ 10 & 8 & 14 & 8 & 0 & 0 & 0 & 14 & 16 \\ 7 & 15 & 8 & 5 & 5 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 9 & 8 & 4 & 7 & 8 & 14 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 18 & 16 & 10 & 16 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Пусть  $p(n, m)$  – количество корневых деревьев с  $n$  раскрашенными с помощью  $m$  красок вершинами, среди которых нет двух смежных вершин одинаковой расцветки. Доказать, что  $p(4, m) = 8C_m^2 + 54C_m^3 + 64C_m^4$ .
6. Построить гамильтонов цикл минимальной стоимости обхода всех вершин

$$\begin{pmatrix} \infty & 4 & 8 & 6 & 4 & 10 & 6 & 9 & 14 \\ 6 & \infty & 7 & 1 & 19 & 8 & 2 & 8 & 6 \\ 8 & 5 & \infty & 6 & 7 & 4 & 4 & 9 & 8 \\ 4 & 16 & 3 & \infty & 7 & 8 & 5 & 8 & 13 \\ 13 & 9 & 4 & 5 & \infty & 8 & 5 & 6 & 10 \\ 10 & 8 & 14 & 8 & 3 & \infty & 5 & 3 & 11 \\ 6 & 5 & 8 & 5 & 5 & 3 & \infty & 6 & 3 \\ 9 & 8 & 4 & 7 & 8 & 1 & 4 & \infty & 3 \\ 10 & 6 & 8 & 16 & 10 & 6 & 6 & 5 & \infty \end{pmatrix}$$

7. Задача двух станков

	$1 \implies 2$	$2 \implies 1$	1	2
$j$	1 2 3 4 5	6 7 8 9	10 11	12 13
$p_j^1$	5 6 5 6 8	2 4 5 8	1 2	
$p_j^2$	3 2 6 4 2	3 6 5 3		2 2

$$\min_{\pi} C_{\max}(\pi)$$