Численные Методы (Линейное программирование)

Alexander Lazarev

Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences

2010-2012

Outline

Литература

- Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. Численные методы.
- И.Х. Сигал, А.П. Иванова. Ведение в прикладное дискретное программирование.
- Пападимитриу, Стайглиц. Комбинаторная оптимизация.

Задача линейного программирования (ЛП) в канонической форме:

$$\min\ c'x,$$
$$Ax \geqslant r,$$
$$x \geqslant 0.$$

$$\min c'x,$$
$$Ax = b,$$
$$x \geqslant 0,$$

называется задачей ЛП в *стандартной форме.*

Задача ЛП в общей форме:

$$\min\ c'x$$

$$\begin{aligned}
a_i'x &= b_i, & i &\in M,\\
a_i'x &\geqslant b_i, & i &\in \overline{M},\\
x_j &\geqslant 0, & j &\in N,\\
x_j &\gtrless 0, & j &\in \overline{N},
\end{aligned}$$

Определение 2.1. Пусть даны целочисленная $(m \times n)$-матрица A со строками a_i', M — множество индексов строк, соответствующих ограничениям в виде равенств, и $\overline{M}$ — множество индексов строк, соответствующих ограничениям в виде неравенств. Аналогично, пусть даны $x \in R^n$, N — множество индексов, соответствующих ограниченным переменным, и $\overline{N}$ — множество индексов, соответствующих неограниченным переменным. Тогда индивидуальная *общая задача ЛП* определяется следующим образом:

$$\min c'x$$

$$\begin{aligned}
a_i'x &= b_i, & i &\in M, \\
a_i'x &\geqslant b_i, & i &\in \overline{M}, \\
x_j &\geqslant 0, & j &\in N, \\
x_j &\gtreqless 0, & j &\in \overline{N},
\end{aligned}$$

Докажем, что все формы: *каноническая*, *стандартная и общая*, *эквивалентны*. Под этим мы понимаем то, что индивидуальную задачу в одной форме легко преобразовать в некоторую индивидуальную задачу в другой форме таким образом, что обе индивидуальные задачи будут иметь одно и то же решение. Каноническая и стандартная формы представляют собой частные случаи общей формы, поэтому нужно только показать, что задачу в общей форме можно сформулировать в канонической и стандартной формах.

1. Чтобы задачу перевести из общей формы в каноническую, необходимо исключить все ограничения в виде равенств и неограниченные переменные. Если в задаче ЛП в общей форме имеется ограничение в виде равенства

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,$$

то его можно заменить двумя ограничениями в виде неравенств

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geqslant b_i,$$

$$\sum_{j=1}^{n} (-a_{ij})\, x_j \geqslant (-b_i).$$

Если в задаче ЛП в общей форме имеется неограниченная переменная

$$x_j \gtreqless 0,$$

то в задаче ЛП в канонической форме можно ввести две переменные x_j^+ и x_j^- и записать

$$x_j = x_j^+ - x_j^-, \quad \text{где } x_j^+ \geqslant 0, \ x_j^- \geqslant 0.$$

2. Чтобы задачу перевести из общей формы в стандартную, нужно исключить ограничения в виде неравенств; неограниченные переменные можно исключить так же, как выше. Если в задаче ЛП в общей форме имеется ограничение в виде неравенства

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geqslant b_i,$$

то в канонической задаче введем переменную s_i и запишем

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - s_i = b_i, \quad s_i \geqslant 0.$$

Переменная s_i, введенная при этом преобразовании, называется переменной *избытка*; она показывает, насколько левая часть неравенства превышает правую часть. Если при формулировке задачи ЛП мы получаем неравенство вида

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i,$$

то можно ввести переменную s_i и записать

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + s_i = b_i, \quad s_i \geqslant 0.$$

Такая переменная называется переменной *недостатка*.

Базисные допустимые решения

Теперь перед нами стоит цель — разработать симплекс-алгоритм для решения задачи ЛП. При этом удобно считать, что дана задача ЛП в *стандартной форме*

$$\min c'x,$$
$$Ax = b, \qquad (A \text{ — целочисленная } (m \times n)\text{-матрица и } m < n),$$
$$x \geqslant 0,$$

что, согласно результатам предыдущего параграфа, не приводит к потере общности.

Предположение 2.1. В матрице A имеется m линейно независимых столбцов A_j, т. е. ранг A равен m.

Определение 2.3. *Базисом* матрицы A называется набор линейно независимых столбцов $\mathcal{B}=\{A_{j_1}, \ldots, A_{j_m}\}$. Можно также рассматривать $\mathcal{B}$ как невырожденную $(m\times m)$-матрицу $B=[A_{j_i}]$. *Базисным решением*, соответствующим $\mathcal{B}$, называется вектор $x\in R^n$, в котором

$x_j=0$ при $A_j\notin\mathcal{B}$,
x_{j_k} есть k-я компонента вектора $B^{-1}b$, где $k=1, \ldots, m$. □

Таким образом, базисное решение x можно найти с помощью следующей процедуры.

1. Выбрать множество $\mathcal{B}$ линейно независимых столбцов в матрице A.
2. Положить все компоненты вектора x, соответствующие столбцам, не входящим в $\mathcal{B}$, равными 0.
3. Решить m полученных уравнений для определения оставшихся компонент вектора x. Они будут называться *базисными переменными*.

Пример 2.2. Рассмотрим задачу ЛП

$$
\begin{array}{l}
\min\ 2x_2 + x_4 + 5x_7, \\
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \qquad\qquad &= 4, \\
x_1 \qquad\qquad + x_5 \qquad &= 2, \\
x_3 \qquad + x_6 \quad &= 3, \\
3x_2 + x_3 \qquad\qquad + x_7 &= 6, \\
x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ x_7 &\geqslant 0.
\end{aligned}
\end{array}
$$

Одним базисом здесь, естественно, является базис $\mathcal{B} = \{A_4, A_5, A_6, A_7\}$, который соответствует матрице $B = I$. Соответствующее базисное решение имеет вид $x = (0, 0, 0, 4, 2, 3, 6)$. Другим базисом будет $\mathcal{B}' = \{A_2, A_5, A_6, A_7\}$ с базисным решением $x' = (0, 4, 0, 0, 2, 3, -6)$. Заметим, что x' *не* является допустимым решением, так как $x'_7 < 0$. $\square$

Можно найти верхнюю оценку абсолютной величины компонент любого базисного решения, используя наше предположение о том, что элементы матрицы A и векторов b и c суть целые числа.

Лемма 2.1. *Пусть* $x=(x_1, \ldots, x_n)$ — *базисное решение. Тогда*

$$|x_j| \leqslant m!\,\alpha^{m-1}\beta,$$

где $\alpha = \max\limits_{i,\,j}\{|a_{ij}|\}$ *и* $\beta = \max\limits_{j=1,\,\ldots,\,m}\{|b_j|\}$.

Доказательство. Утверждение справедливо для тех переменных x_j, которые не являются базисными, поскольку в этом случае $x_j=0$. Напомним, что базисная переменная x_j является суммой m произведений элементов матрицы B^{-1} на элементы вектора b. По определению обратной матрицы каждый элемент матрицы B^{-1} равен определителю порядка $(m-1)\times(m-1)$, деленному на отличный от нуля определитель порядка $m\times m$. Так как знаменатель — целое число, его абсолютная величина не меньше 1. Определитель, стоящий в числителе, есть сумма $(m-1)!$ произведений $m-1$ элементов матрицы A. Следовательно, его абсолютная величина не превосходит $(m-1)!\,\alpha^{m-1}$. Поскольку каждое x_j есть сумма m элементов матрицы B^{-1}, умноженных на элементы вектора b, то

$$|x_j| \leqslant m!\,\alpha^{m-1}\beta. \quad \square$$

Определение 2.4. Если базисное решение x лежит в F, то x называется *базисным допустимым решением* (бдр). □

Например, в задаче ЛП в примере 2.2 вектор $x = (0, 0, 0, 4, 2, 3, 6)$ есть бдр. Базисные допустимые решения играют центральную роль как в теории, так и в вычислительной практике линейного программирования. Один из аспектов их важности выражен в следующей лемме, утверждающей, что *все* базисные допустимые решения суть потенциальные однозначные оптимальные решения подходящей задачи ЛП.

Лемма 2.2. *Пусть x есть бдр задачи*

$$\begin{aligned} Ax &= b, \\ x &\geqslant 0, \end{aligned}$$

соответствующее базису $\mathcal{B}$. Тогда существует вектор стоимости c, такой, что x является единственным оптимальным решением задачи ЛП

$$\begin{aligned} \min\ & c'x, \\ Ax &= b, \\ x &\geqslant 0. \end{aligned}$$

Доказательство. Определим вектор c следующим образом:

$$c_j = \begin{cases} 0, & \text{если } A_j \in \mathcal{B}, \\ 1, & \text{если } A_j \notin \mathcal{B}. \end{cases}$$

Стоимость бдр x равна $c'x=0$. Очевидно, x — оптимальное решение, поскольку все c_j неотрицательны. Более того, если любое другое допустимое решение y также имеет нулевую стоимость, то в нем долж-

но быть $y_j=0$ для всех $A_j \notin \mathcal{B}$. Следовательно, y должно совпадать с x, т. е. x — единственное оптимальное решение. □

Совсем не очевидно, однако, что любая задача ЛП обладает базисными допустимыми решениями. Например, если $F=\varnothing$, то, естественно, не может быть бдр. Удобно, однако, пока исключить этот патологический случай. Позднее мы вернемся к нему и увидим, как можно убрать это предположение.

Предположение 2.2. Множество F допустимых точек не пусто.

Теорема 2.1. *При предположениях 2.1 и 2.2 существует по крайней мере одно бдр.*

Доказательство. Допустим, что F содержит решение x с $t>m$ ненулевыми компонентами, и пусть x — решение из F с наибольшим числом нулевых компонент. Не ограничивая общности, будем считать, что

$$x_1, \ldots, x_t > 0; \quad x_{t+1}, \ldots, x_n = 0.$$

Рассмотрим первые t столбцов матрицы A. Они, очевидно, удовлетворяют равенству

$$A_1 x_1 + \ldots + A_t x_t = b. \tag{2.4}$$

Пусть r — ранг матрицы, составленной из этих t столбцов. Тогда $r>0$, поскольку если $r=0$, то бдр $x=0$ лежит в F. Кроме того, $r \leqslant m<t$. Можно считать, что матрица

$$\begin{bmatrix} a_{11} a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \cdot \quad \cdot & \dots & \cdot \\ a_{r1} a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{bmatrix}$$

невырожденна. Поэтому можно, решив систему уравнений 2.4, выразить $x_1, \dots, x_r$ через $x_{r+1}, \dots, x_t$. Другими словами,

$$x_j = \beta_j + \sum_{i=r+1}^{t} \alpha_{ij} x_i, \quad j = 1, \dots, r.$$

Положим $\theta = \min\{x_{r+1}, \theta_1\}$, где

$$\theta_1 = \min_{\alpha_{r+1,i} > 0} \left\{ \frac{x_i}{\alpha_{r+1,i}}, \quad i = 1, \ldots, r \right\}.$$

2*

Зададим новое допустимое решение $\hat{x}$ следующим образом:

$$\hat{x}_j = \begin{cases} x_j - \theta, & \text{если} \quad j = r+1, \\ x_j, & \text{если} \quad j > r+1, \\ \beta_j + \sum\limits_{i=r+1}^{t} \alpha_{ij}\hat{x}_i, & \text{если} \quad j < r+1. \end{cases}$$

Тогда $\hat{x}_j = x_j - \alpha_{r+1,j}\theta$ при $j \leqslant r$. Если $\theta = x_{r+1}$, то $\hat{x}_{r+1} = 0$; если $\theta = \theta_1 = x_k/\alpha_{r+1,k}$ для некоторого $k \leqslant r$, то $\hat{x}_k = 0$. В любом случае $\hat{x}$ — допустимое решение, в котором число нулевых компонент на единицу больше, чем в x, и приходим к противоречию.

Это рассуждение показывает, что найдется решение x с $t \leqslant m$ ненулевыми компонентами и, более того, что соответствующие столбцы можно считать линейно независимыми. Это множество столбцов можно затем расширить до базиса для x, поскольку ранг A равен m. $\square$

2.3.2. Выпуклые многогранники. Афинное подпространство пространства R^d размерности $d-1$ называется *гиперплоскостью*. Иначе гиперплоскость можно определить как множество точек x, удовлетворяющих равенству

$$a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_dx_d=b,$$

в котором не все a_i равны 0. Гиперплоскость определяет два *(замкнутых) полупространства*, а именно множества точек, удовлетворяющих соответственно неравенствам

$$a_1x_1+\ldots+a_dx_d\geqslant b,$$
$$a_1x_1+\ldots+a_dx_d\leqslant b.$$

Пример 2.3. Трехмерный многогранник P на рис. 2.1 образован пересечением полупространств, задаваемых неравенствами (2.7).

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 &\leqslant 4,\\
x_1 &\leqslant 2,\\
x_3 &\leqslant 3,\\
3x_2 + x_3 &\leqslant 6,\\
x_1 &\geqslant 0,\\
x_2 &\geqslant 0,\\
x_3 &\geqslant 0.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

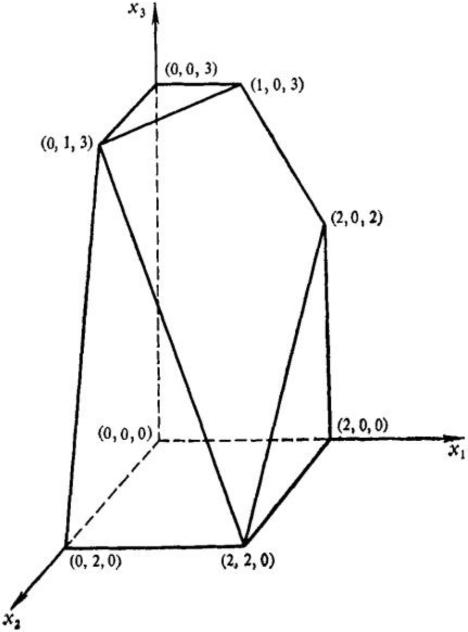
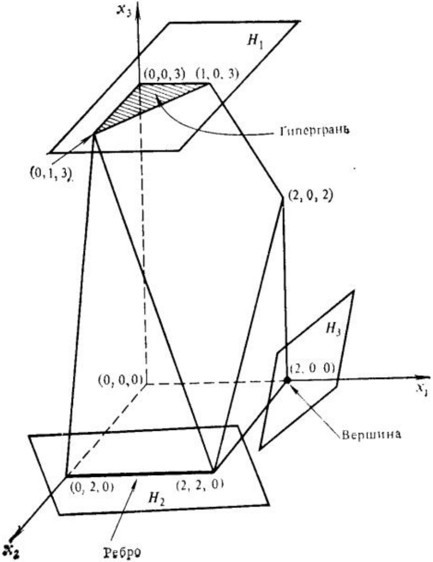


Рис. 2.1. 3-мерный многогранник из примера 2.3

Пример 2.3 (продолжение). На рис. 2.2 показаны многогранник P и три гиперплоскости H_1, H_2 и H_3, которые определяют соответственно три грани: гипергрань, ребро и вершину. □



2.3.2. Выпуклые многогранники. Афинное подпространство пространства R^d размерности $d-1$ называется *гиперплоскостью.* Иначе гиперплоскость можно определить как множество точек x, удовлетворяющих равенству

$$a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_dx_d=b,$$

в котором не все a_i равны 0. Гиперплоскость определяет два *(замкнутых) полупространства*, а именно множества точек, удовлетворяющих соответственно неравенствам

$$a_1x_1+\ldots+a_dx_d\geqslant b,$$
$$a_1x_1+\ldots+a_dx_d\leqslant b.$$

Теорема 2.3 [Gru, Roc, ЮГ]. (а) *Каждый выпуклый многогранник является выпуклой оболочкой его вершин.*

(б) *Обратно, если V — конечное множество точек, то выпуклая оболочка множества V представляет собой выпуклый многогранник P. Множество вершин многогранника P является подмножеством множества V.*

3. Третий способ представления многогранника — это алгебраическая версия способа 2. Пусть

$$\begin{aligned} Ax &= b, \\ x &\geqslant 0, \end{aligned} \tag{2.8}$$

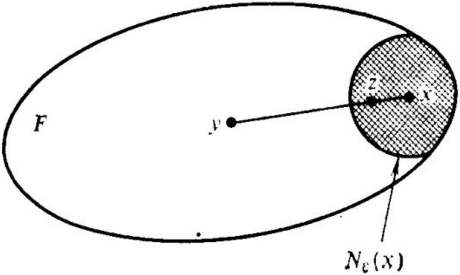
— уравнения и неравенства, определяющие допустимую область F некоторой задачи ЛП, удовлетворяющей предположениям 2.1, 2.2 и 2.3. Так как ранг A равен m, где A — матрица размера $m \times n$, то можно считать, что уравнения $Ax=b$ имеют вид

$$x_i = b_i - \sum_{j=1}^{n-m} a_{ij} x_j, \quad i = n-m+1, \; \ldots, \; n, \tag{2.8'}$$

Теорема 1.1. *Рассмотрим индивидуальную задачу оптимизации* (F, c), *где* $F \subseteq R^n$ — *выпуклое множество и* c — *выпуклая функция. Тогда система окрестностей, определяемая евклидовым расстоянием,*

$$N_\varepsilon(x) = \{y\colon\ y \in F \quad \text{и} \quad \|x - y\| \leqslant \varepsilon\}$$

точная для любого $\varepsilon > 0$.


F
y
z
x
$N_\varepsilon(x)$

$$z=\lambda x+(1-\lambda)y, \quad 0<\lambda<1$$

принадлежала окрестности $N_\varepsilon(x)$. Вычисляя функцию стоимости c в этой точке, получаем в силу выпуклости c

$$c(z)=c(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqslant\lambda c(x)+(1-\lambda)c(y).$$

Отсюда

$$c(y)\geqslant[c(z)-\lambda c(x)]/(1-\lambda).$$

Но $c(z)\geqslant c(x)$, так как $z\in N_\varepsilon(x)$, поэтому

$$c(y)\geqslant[c(x)-\lambda c(x)]/(1-\lambda)=c(x).$$

Определение 2.5. Бдр (и соответствующая вершина) называется *вырожденным*, если оно содержит более чем $n-m$ нулей. □

Сформулируем теперь существенный результат наших обсуждений.

Теорема 2.5. *Если два различных базиса соответствуют одному и тому же бдр х, то х вырожденно.*

Переход от одного бдр к другому

Пусть x_0 — бдр в индивидуальной задаче ЛП с матрицей A, соответствующее упорядоченному множеству индексов базисных столбцов $\mathcal{B}=\{A_{B(i)}:\ i=1,\ldots,m\}$. Если x_{i0}, $i=1,\ldots,m$,— базисные компоненты вектора x_0, то

$$\sum_{i=1}^{m} x_{i0}A_{B(i)}=b, \quad \text{где} \quad x_{i0}\geqslant 0 \tag{2.14}$$

и, как обычно, $A_j\in R^m$ используется для представления j-го столбца матрицы A. По определению множество базисных вектор-столбцов $\mathcal{B}$ линейно независимо, поэтому можно представить любой внебазисный столбец $A_j\in R^m$, $A_j\notin\mathcal{B}$ в виде линейной комбинации базисных столбцов

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij}A_{B(i)}=A_j. \tag{2.15}$$

Умножая (2.15) на скаляр $\theta > 0$ и вычитая полученное равенство из (2.14), получаем очень важное равенство

$$\sum_{i=1}^{m} (x_{i0} - \theta x_{ij}) A_{B(i)} + \theta A_j = b. \tag{2.16}$$

Будем считать пока, что x_0 невырожденно; тогда $x_{i0} > 0$ для всех x_{i0}, и, увеличивая θ, начиная с нуля, будем переходить от данного бдр к некоторым допустимым решениям с $m+1$ строго положительными компонентами. Как долго мы можем увеличивать θ и все еще оставаться в допустимой области? До тех пор, пока одна из компонент $(x_{i0} - \theta x_{ij})$ не обратится в нуль, что произойдет при значении

$$\theta_0 = \min_{i:\, x_{ij} > 0} x_{i0}/x_{ij}. \tag{2.17}$$

Пример 2.5. Рассмотрим задачу ЛП с ограничениями из примера 2.2 (или 2.4) Базису $\mathscr{B}=\{A_1, A_3, A_6, A_7\}$, заданному условиями $B(1)=1$, $B(2)=3$, $B(3)=6$, $B(4)=7$, соответствует бдр $x=(2, 0, 2, 0, 0, 1, 4)$. Внебазисный столбец $A_5=\text{col}\,(0, 1, 0, 0)$ можно представить в виде

$$A_5 = x_{15}A_1 + x_{25}A_3 + x_{35}A_6 + x_{45}A_7 = \\ = 1\cdot A_1 - 1\cdot A_3 + 1\cdot A_6 + 1\cdot A_7.$$

Тогда равенство (2.16) принимает вид

$$(2-\theta)\,A_1 + (2+\theta)\,A_3 + (1-\theta)\,A_6 + (4-\theta)\,A_7 + \theta A_5 = b.$$

Из рис. 2.1 видно, что при возрастании θ от 0 до 1 это семейство допустимых точек $(2-\theta, 0, 2+\theta, 0, \theta, 1-\theta, 4-\theta)$ движется от вершины (2, 0, 2) (и бдр (2, 0, 2, 0, 0, 1, 4)) к вершине (1, 0, 3) (и бдр (1, 0, 3, 0, 1, 0, 3)). Равенство (2.17) дает $\theta_0=1$, и новым базисом становится $\mathscr{B}'$ с $B'(1)=1$, $B'(2)=3$, $B'(3)=5$ и $B'(4)=7$. □

Теорема 2.7. *Пусть дано бдр* x_0 *с базисными компонентами* x_{i0}, $i=1, \dots, m$, *и базисом* $\mathcal{B}=\{A_{B(i)}: i=1, \dots, m\}$, *и пусть* j *таково, что* $A_j \notin \mathcal{B}$. *Тогда новое допустимое решение, определяемое равенствами*

$$\theta_0 = \min_{i,\ x_{ij}>0} (x_{i0}/x_{ij}) = x_{l0}/x_{lj}, \tag{2.18}$$

$$x'_{i0} = \begin{cases} x_{i0} - \theta_0 x_{ij}, & i \neq l, \\ \theta_0, & i = l, \end{cases} \tag{2.19}$$

является бдр с базисом $\mathcal{B}'$, *в котором*

$$B'(i) = \begin{cases} B(i), & i \neq l, \\ j, & i = l. \end{cases} \tag{2.20}$$

Если минимум в (2.18) *достигается при более чем одном* i, *то новое бдр вырожденно.*

уравнений

$$
\begin{aligned}
3x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad\quad &= 1,\\
5x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \quad &= 3,\\
2x_1 + 5x_2 + x_3 \qquad + x_5 &= 4
\end{aligned}
$$

будем представлять таблицей

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	3	2	1	0	0
3	5	1	1	1	0
4	2	5	1	0	1

отделяя правые части уравнений вертикальной чертой и рассматривая их как нулевой столбец. Можно умножить любую строку в таблице на ненулевую константу или прибавить любую строку, умноженную на произвольное число, к любой другой строке, при этом информация, представляемая соответствующей системой уравнений, не изменится. Эти операции называются обычно *элементарными операциями над строками*. Если известен базис $\mathcal{B}$, можно произвести элементарные операции над строками так, чтобы базисные столбцы образовали единичную подматрицу: $A_{B(i)}=e_i$, $i=1, \ldots, m$, где e_i обозначает вектор-столбец с m элементами, в котором в i-й строке стоит 1 и в остальных строках стоит 0. Таким образом, если в нашем примере $\mathcal{B}=\{A_3, A_4, A_5\}$, то можно умножить строку 1 на -1 и прибавить ее к строкам 2 и 3, при этом получим

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	3	2	1	0	0
2	2	−1	0	1	0
3	−1	3	0	0	1

В нулевом столбце стоят сейчас значения базисных переменных $x_{B(i)}=x_{i0}$, $i=1, \ldots, m$, которые получаются, если внебазисные переменные положить равными нулю. Заметим, что внебазисные столбцы содержат в точности числа x_{ij}; например,

$$A_1 = 3A_3 + 2A_4 - A_5 = \sum_{i=1}^{m} x_{i1} A_{B(i)}.$$

Следовательно, можно непосредственно произвести вычисления, необходимые для изменения базиса. Пусть, например, мы хотим ввести в базис столбец $j=1$; тогда (2.18) дает

$$\theta_0 = \min_{i,\, x_{ij} > 0} \left(\frac{x_{i0}}{x_{ij}}\right) = \frac{1}{3} \quad \text{при } i = l = 1.$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$\frac{1}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0
$\frac{4}{3}$	0	$-\frac{7}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1	0
$\frac{10}{3}$	0	$\frac{11}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	1

$$\min_{x \in X} \langle c, x \rangle = \min_{x \in X} c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n$$

$$X = \{x : Ax = b, x \geqslant 0\} =$$

$$= \begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i, \quad i = \overline{1, m} \\ x_j \geqslant 0, \quad j = \overline{1, n}. \end{cases}$$

Строки матрицы A линейно независимы. Переход от основной задачи линейного программирования к канонической задаче

$$a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n - x_{n+i} = b_i, \quad i = \overline{1, m}.$$

$$\min c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n + 0 \cdot x_{n+1} + \ldots + 0 \cdot x_{n+m}.$$

Обозначим

$$P_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, \quad j = \overline{1, n}, \quad P_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = b.$$

$$x_1 P_1 + x_2 P_2 + \ldots + x_n P_n = P_0.$$

Будем предполагать $m < n$, m – ранг матрицы A.
Пусть $x = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$- план – опорный, если векторы P_1, $P_2, \dots, P_k$ линейно независимы. Если $k = m$, то план называется невырожденным, в противном случае – вырожденный.

Теорема. Для того, чтобы план $x = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$ был опорным $\Longleftrightarrow$, чтобы x – была угловой точкой множества допустимых решений (планов).

Итерационный шаг метода состоит в переходе от угловой точки x к угловой точке x', так что $\langle c, x' \rangle < \langle c, x \rangle$. Базис из m векторов P_j; при переходе от одного опорного плана к другому базис изменяется

$$
\begin{array}{lllllllll}
\min 2x_1 & -x_2 & +3x_3 & -2x_4 & +x_5 & +4x_6 & & \\
 & x_1 & & +2x_3 & +x_4 & -2x_5 & & = 4 \\
 & 2x_1 & +x_2 & -x_3 & & +2x_5 & & = 6 \\
 & -x_1 & & +2x_3 & & +x_5 & +x_6 & = 8
\end{array}
$$

$$x_i \geqslant 0, \quad i = \overline{1,6}.$$

				2	−1	3	−2	1	4
	Базис	$C_{баз}$	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
	P_4	-2	4	1	0	2	1	-2	0
$\min\left\{\cancel{\frac{4}{-2}}\frac{6}{2}, \frac{8}{1}\right\}$	P_2	-1	6	2	1	-1	0	2	0
	P_6	4	8	-1	0	2	0	1	1
			18	-10	0	2	0	5^*	0
	P_4	-2	10	3	1	1	1	0	0
	P_5	1	3	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	1	0
$\min\left\{\frac{10}{1}, \cancel{\frac{3}{-\frac{1}{2}}}, \frac{5}{\frac{5}{2}}\right\}$	P_6	4	5	-2	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	0	0	1
			3	-15	$-$	$+^*$	0	0	0
	P_4	-2	8	$\frac{19}{5}$	$\frac{6}{5}$	0	1	0	$-\frac{2}{5}$
	P_5	1	4	$\frac{3}{5}$	0.4	0	0	1	$\frac{1}{5}$
	P_3	3	2	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{1}{5}$	1	0	0	$\frac{2}{5}$
			-6	$-$	$-$	0	0	0	$-$

В базис вводят столбец P_j для которого $\sum_{i=1}^{m} C_{\text{баз}j} x_{ij} - c_j > 0$, в некоторых схемах max, в некоторых первый попавшийся $P_j = \sum_{i=1}^{m} P_{i\text{баз}}$. Ведущий элемент $\circ$:

$$x_j = \min_{i:x_{ij}>0} \left\{ \frac{x_i}{x_{ij}} \right\} = \min \left\{ \cancel{\frac{4}{-2}}, \frac{6}{2}, \frac{8}{1} \right\}.$$

$$
\begin{array}{lrrrrrrrr}
\min & x_1 & & & -x_4 & -x_5 & +x_6 & & \\
 & x_1 & & & +x_4 & +x_5 & +x_6 & +x_7 & =1 \\
 & -2x_1 & +x_2 & & +x_4 & -3x_5 & +4x_6 & & =0 \\
 & -3x_1 & & +x_3 & +4x_4 & -2x_5 & +x_6 & & =0
\end{array}
$$

$$x_i \geqslant 0, \quad i = \overline{1,7}$$

			1	0	0	-1	-1	1	0
Базис	$C_{баз}$	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
P_7	0	1	1	0	0	1	1	1	1
P_2	0	0	-2	1	0	1	-3	4	0
P_3	0	0	-3	0	1	4	-2	1	0
		0	-1	0	0	1	1	-1	0
P_7	0	1	3	-1	0	0	4	-3	1
P_4	-1	0	-2	1	0	1	-3	4	0
P_3	0	0	5	-4	1	0	10	-15	0
		0	1	-1	0	0	4	-5	0
P_7	0	1	0	$\frac{7}{5}$	$-\frac{3}{5}$	0	-2	6	1
P_4	-1	0	0	$-\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	1	1	-2	0
P_1	1	0	1	$-\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	2	-3	0
		0	0	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	2	-2	0

			1	0	0	−1	−1	1	0
Базис	$C_{баз}$	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
P_7	0	1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	2	0	2	1
P_5	−1	0	0	$-\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	1	1	−2	0
P_1	1	0	1	$\frac{2}{5}$	$-\frac{3}{5}$	−2	0	1	0
		0	0	1	−1	−2	0	2	0
P_7	0	1	−2	$-\frac{3}{5}$	$\frac{7}{5}$	6	0	0	1
P_5	−1	0	2	$\frac{1}{5}$	$-\frac{4}{5}$	−3	1	0	0
P_6	1	0	1	$\frac{2}{5}$	$-\frac{3}{5}$	−2	0	1	0
		0	−2	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	2	0	0	0
P_7	0	1	4	0	−1	−3	3	0	1
P_2	0	0	10	1	−4	−15	5	0	0
P_6	1	0	−3	0	1	4	−2	1	0
		0	−4	0	1	5	−1	0	0

			1	0	0	−1	−1	1	0
Базис	$C_{баз}$	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
P_7	0	1	1	0	0	1	1	1	1
P_2	0	0	−2	1	0	1	−3	4	0
P_3	0	0	−3	0	1	4	−2	1	0
		0	−1	0	0	1	1	−1	0

Если функция $f(x) = \langle c, x \rangle$ принимает одинаковые значения в нескольких вырожденных угловых точках, то, по-видимому, возможны более сложные бесконечные симплекс-процессы, в частности явления зацикливания с участием в цикле базисов различных таких точек.
Можно ли избежать зацикливания, или, точнее, появления бесконечных симплекс-процессов?

Определение. Любое уточняющее (1.4.34), (1.4.35) правило выбора разрешающего элемента, с помощью которого можно избежать зацикливания, или, точнее, появления бесконечного симплекс-процесса, во всякой канонической задаче (1.4.1), назовем *антициклином*.

Определение 1.5.2. Говорят, что вектор $x = (x^1, \ldots, x^l) \in \mathbf{R}^l$ *лексикографически положителен* [*отрицателен*], и обозначают $x \succ 0[x \prec 0]$, если $x \neq 0$ и первая ненулевая координата вектора x положительна [отрицательна]. Говорят, что вектор $x \in \mathbf{R}^l$ *лексикографически больше* [*меньше*] вектора $y \in \mathbf{R}^l$, и пишут $x \succ y[x \prec y]$, если $x - y \succ 0[x - y \prec 0]$.

Другими словами, запись $x \succ 0$ означает, что существует такой номер p, $1 \leqslant p \leqslant l$, что $x^1 = \ldots = x^{p-1} = 0$, $x^p > 0$, остальные координаты $x^{p+1}, \ldots, x^n$ могут быть любыми.
Лексикографическое неравенство $x \succ y$ означает существование такого номера p, $1 \leqslant p \leqslant l$, что $x^1 = y^1, \ldots, x^{p-1} = y^{p-1}$, $x^p > y^p$.

Опираясь на определение 1.5.2, несложно вывести следующие важные для дальнейшего изложения свойства отношения $\succ$:
1) если $x \succ 0$, то $\alpha x \succ 0$ для всех чисел $\alpha > 0$;
2) если $x \succ y$, то $\alpha x \succ \alpha y$ для всех $\alpha > 0$;
3) если $x \succ 0$, $y \succ 0$, то $x + \alpha y \succ 0$ для всех $\alpha \geqslant 0$;
4) если $x \succ 0$, то $y \succ y - \alpha x$ для всех $\alpha > 0$ и $y \in \mathbf{R}^l$.

Определение. Пусть M_0 – некоторое множество целых (номеров), и пусть $Y = \{x_i = (x_i^1, x_i^2, \ldots, x_i^l) \in \mathbf{R}^l,\ i \in M_0\}$. Вектор x_s, $s \in M_0$, называется *лексикографическим минимумом* множества Y, если для всех $i \in M_0$ либо $x_i \succ x_s$, либо $x_i = x_s$. Обозначение: $x_s = \mathrm{lex} \min\limits_{i \in M_0} x_i$.

ЛЕММА 1.5.1. *Пусть* M_0 *– конечное множество номеров, и пусть в множестве* $Y = \{x_i \in \mathbf{R}^l, i \in M_0\}$ *все векторы различны. Тогда лексикографический минимум множества* Y *достигается на единственном векторе* $x_s \in Y$*. Для определения номера* s *нужно последовательно строить множества,* M_0*,*
$M_1 = \left\{ s : s \in M_0, x_s^1 = \min\limits_{i \in M_0} x_i^1 \right\}, \ldots,$
$M_p = \left\{ s : s \in M_{p-1}, x_s^p = \min\limits_{i \in M_{p-1}} x_i^p \right\} \ldots$ *до тех пор, пока не будет обнаружено множество* M_ν*,* $0 \leqslant \nu \leqslant l$*, состоящее из единственного номера* s*, который и будет искомым.*

Доказательство. В простейшем случае, когда множество M_0 состоит из единственного номера s, x_s – искомый вектор по определению. Поэтому пусть M_0 содержит более одного номера. Тогда строим множество M_1. Если M_1 содержит лишь один номер s, то $x_s^1 < x_i^1$ для всех $i \in M_0$, $i \neq s$, и ясно, что $x_s = \operatorname{lex} \min\limits_{i \in M_0} x_i$. Если M_1 содержит по крайней мере два номера, то строим множество $M_2 = \left\{ i \in M_1 : x_s^2 = \min\limits_{i \in M_1} x_i^2 \right\}$ и т.д.

Пусть уже построены множества $M_0 \supset M_1 \supset \ldots \supset M_p$, $p < l$, причем множества $M_0, \ldots, M_{p-1}$ содержат более одного номера. Если M_p состоит из одного номера s, то x_s – искомый вектор. Если M_p содержит более одного номера, то строим множество M_{p-1} и т.д. В крайнем случае, когда множества $M_0, \ldots, M_{l-1}$ окажутся состоящими более чем из одного номера, этот процесс закончится построением множества
$$M_l = \left\{ s \in M_{l-1} : x_s^l = \min_{i \in M_{l-1}} x_i^l \right\}.$$

Если бы множество M_l содержало два различных номера s, q, то у векторов x_s, x_q все координаты были бы одинаковыми, т.е. $x_s = x_q$. Однако по условию в множестве Y нет двух одинаковых векторов. Следовательно, M_l состоит из единственного номера s, причем $x_s = \mathrm{lex}\min\limits_{i \in M_0} x_i$.

Лемма доказана.

Опираясь на отношение $\succ$ для векторов, введем отношения $\overset{P}{\succ}$, $\overset{\Delta}{\succ}$ на множестве симплекс-таблиц. Не стремясь к общности построений, ограничимся следующим определением, достаточным для дальнейших рассмотрений.

Определение 1.5.4. Симплекс-таблицу $S = S(v, B)$ угловой точки v с базисом B назовём *лексиграфически положительной* и будем обозначать $S \overset{P}{\succ} 0$, если все её строки $P_i = (\gamma_{i0}, \gamma_{i1}, \ldots, \gamma_{in}) \succ 0$, $i = \overline{1, r}$. Скажем, что симплекс-таблица $S_1 = S(v_1, B_1)$ *лексикографически больше* другой симплекс-таблицы $S_2 = S(v_2, B_2)$, и будем обозначать $S_1 \overset{\Delta}{\succ} S_2$, если строка $\Delta = \Delta(v_1, B_1) = (\Delta_{10}, \ldots, \Delta_{1n})$ таблицы S_1 лексикографически больше строки $\Delta(v_2, B_2) = (\Delta_{20}, \ldots, \Delta_{2n})$ таблицы S_2.

Пусть v – какая-либо угловая точка множества X с базисом $B = (A_{j_1}, \dots, A_{j_r})$ и симплекс-таблицей $S = S(v, B)$, пусть это будет таблица 1.4.3. Предположим, что таблица S удовлетворяет условиям (1.4.34) и уже зафиксирован какой-либо номер k со свойствами

$$\begin{gathered} k \notin I(v),\ \Delta_k = \Delta_k(v) > 0 \\ I_k(v) = \{i : 1 \leqslant i \leqslant r, r_{ik}(v) > 0\} \neq \varnothing \end{gathered} \tag{1.5.6}$$

из (1.4.34). Выберем номер s и разрешающий элемент γ_{sk} из условия

$$\frac{\Gamma_s(v)}{\gamma_{sk}(v)} = \operatorname{lex} \min_{i \in I_k(v)} \frac{\Gamma_i(v)}{\gamma_{ik}(v)}, \quad s \in I_k(v). \tag{1.5.7}$$

Задача о питании

В сутки на одного человека требуется (в граммах на 1 кг веса)

Белки	Жиры	Углеводы	Калории	
4	5	13	110	Средние

данные содерж. основных пищевых инградиентов (в граммах) и калорий в продуктах:

	Белки	Жиры	Углеводы	Калории	
Молоко	3	3	4	62	x_1
Каша манная	3	6	16	137	
Каша гречневая	3	5	16	124	
Творог	12	8	3	141	
Желток 1 шт.(15 гр)	2	4	1	60	
Мясо II категор. морожен.(нетто)	19	4	0	114	x_2
Рыба (треска)	15	1	0	65	
Масло сливочное	1	79	1	734	x_3
Сахар	0	0	96	390	x_4
Хлеб белый из муки II сорта	7	1	46	229	x_5
Яблоки	1	0	12	48	x_6
Рыбий жир	0	100	0	900	

1) Метод искусственного базиса. Если нет единичных векторов P_j, то их строят:

$$
\begin{aligned}
&c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n + Mx_{n+1} + \ldots + Mx_{n+m} \quad \min \\
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \quad M\text{– большое число.} \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + \ldots x_{n+m} = b_m
\end{aligned}
$$

2) Если задача $\langle c, x\rangle$ – max, то решаем $\langle -c, x\rangle$ – min.
3) Если для некоторых x_i нет ограничения $\geqslant 0$, тогда $x_i = x_i' - x_i''$, причем x_i', $x_i'' \geqslant 0$.
4) Если опорный план оказался вырожденным, то $\exists\, x_i = 0$, т.е. возможно зацикливание. Метод возмущенияю

$$P_0 = X_1 P_1 + 0 P_2 + x_3 P_3$$

Выбираем малое $\varepsilon > 0$ и

$P_0' = (X_1 + \varepsilon) P_1 + \varepsilon^2 P_2 + (x_3 + \varepsilon^3) P_3$– находится прибл. решение.

План x называется базисным, если $(n - m)$, его компанент $= 0$, а $P_{j_1}, \ldots, P_{j_m}$ линейно независимы. План невырожденный, если $x_j > 0$.
5) Если некоторое $b_i < 0$, то умножают i строку на (-1).
Задача на минимакс

$$\max_{1 \leqslant S \leqslant k} \left(\sum_{j=1}^{n} c_{sj} x_j - d_s \right) - \min_{x} \quad AX = b, \quad x \geqslant 0.$$

Сводится к задаче линейного программирования

$$x_{n+1} - \min; \quad \sum_{j=1}^{n} c_{sj} x_j - d_s \leqslant x_{n+1}, \quad s = \overline{1, k}, \quad AX = b, \quad x \geqslant 0.$$

6) Если мы хотим ввести в базис P_j, но все коэффициенты в этом столбце < 0, то значение целевой функции $= -\infty$.
Приготовление задачи для решения её симплекс методом:
1) Все свободные члены ???? неотрицательными.
2) Все неравенства путем добавления или вычитания ???? равенствами.
3) Если нет $x_i \geqslant 0$, то $x_i = x_i' - x_i''$, $x_i' \geqslant 0$, $x_i'' \geqslant 0$.
4) Если нет единичных векторов для базиса, то вводят искусственные переменные $\langle c, x \rangle + M x_{n+1} \ldots$

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 \qquad \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 \leqslant -4 \\ x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 2 \\ x_1, \quad x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

Задача. Имеется сырьё в объёме C и n технологических процессов. Если количество x сырья использовать в i-м технологическом процессе, то получим прибыль $f_i(x)$. Как распределить сырьё между процессами, чтобы получить максимальную прибыль.

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) \to \max, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = c, \quad x_i \geqslant 0, \quad i = \overline{1,n}. \tag{1}$$

Вводим функцию Беллмана

$$B_k(y) = \max \sum_{i=1}^{k} f_i(x_i), \quad \sum_{i=1}^{k} x_i = y, \quad x_i \geqslant 0, \quad i = \overline{1,k}.$$

$$B_1(y) = f_1(y),$$

$B_{k+1}(y) = \max\limits_{0 \leqslant z \leqslant y} \{B_k(y-z) + f_{k+1}(z)\}\ \underset{0 \leqslant y \leqslant c}{-}$ уравнение Беллмана.

$B_k(y)$, $k = 1, 2, \ldots, n$ – функции от одного аргумента.

Достоинства метода:
1) исходная задача максимизации по n переменным свелась к $(n-1)$ задаче максимизации по одной переменной;
2) функции f_i могут быть заданы таблично, графически, алгоритмически;
3) по результатам вычислений $B_k(y)$ легко построить решение задачи (1) при варьированных значениях c и n; это позволяет провести анализ чувствительности решения задачи (1) к изменениям указанных параметров.

Пример $c = 5$, x_i – целочисленны, $n = 3$

x	0	1	2	3	4	5
$f_1(x)$	0	1	2	3	4	5
$f_2(x)$	0	0	1	2	4	7
$f_3(x)$	0	2	2	3	3	3

y	0	1	2	3	4	5
$B_1(y)$	0	1	2	3	4	5
$B_2(y)$	0	1(0)	2(0)	3(0)	4(0,4)	7(5)
$B_3(y)$	0	2(1)	3(1)	4(1)	5(1)	7(0)

$$B_1(y) = f_1(y)$$

$$B_2(y) = \max_{0 \leqslant z \leqslant y} \{B_1(y - z) + f_2(z)\}$$

В скобках указано значение z.

Оптим. знач. кр. $B_3(5) = 7$, если $x_3 = 0$, $x_2 = 5$ и $x_1 = 0$.

Примеры для задачи распределения ресурса

① $c = 15$

i	1	2	3	4	5
$f_i(x)$	x	$\begin{matrix} 2, \text{ если } x > 3 \\ 0, \text{ если } x \leqslant 3 \end{matrix}$	$\frac{x^2}{15}$	$10 - x$	$\max\{0, x-4\}$

② $c = 16$

i	1	2	3	4	5
$f_i(x)$	$\max\{0, x-10\}$	$\max\{0, x-8\}$	x	$\frac{x^2}{14}$	$7 - x$

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 \leqslant 40.$$

10

③ $c = 15$

i	1	2	3	4	5
$f_i(x)$	$\begin{matrix} 3, \text{ если } x > 7 \\ 0, \text{ если } x \leqslant 7 \end{matrix}$	x	$\frac{x^2}{14}$	$\max\{0, x-7\}$	$8 - x$

④ $c = 20$

i	1	2	3	4	5
$f_i(x)$	$x+2$	$2x$, если $x > 10$ x, если $5 \leqslant x \leqslant 10$ $0, x \leqslant 5$	$\frac{x^2}{15}$	$2x-1$	$\max\{0, x-8\}$

⑤ $c = 18$

i	1	2	3	4	5
$f_i(x)$	$x+1$	$5,\ x > 10$ $2,\ x \leqslant 10$	$\frac{x^2}{12}$	$\max\{0, x-12\}$	$\max\{2, x-10\}$

⑥ $c = 20$

i	1	2	3	4	5
$f_i(x)$	$\max\{0, x-10\}$	$\frac{x^2}{15}$	$2x-10$	x	$\max\{4, x-12\}$

⑦ $c = 19$

i	1	2	3	4	5
$f_i(x)$	x	$\begin{matrix} 5, & x > 10 \\ 0, & x \leqslant 10 \end{matrix}$	$\max\{0, x - 11\}$	$\max\{4, x - 15\}$	$\frac{x^2}{12}$

⑧ $c = 20$

i	1	2	3	4	5
$f_i(x)$	x	$\begin{matrix} 4, & x > 10 \\ 0, & x \leqslant 10 \end{matrix}$	$\max\{2, x - 12\}$	$\frac{x^2}{15}$	$20 - x$

⑨ $c = 21$

i	1	2	3	4	5
$f_i(x)$	x	$\begin{matrix} 5, & x > 12 \\ 0, & x \leqslant 12 \end{matrix}$	$\max\{3, x - 13\}$	$\frac{x^2}{16}$	$25 - x$

⑩ $c = 20$

i	1	2	3	4	5
$f_i(x)$	x	$\begin{matrix} 6, & x > 11 \\ 0, & x \leqslant 11 \end{matrix}$	$\max\{2, x - 12\}$	$\frac{x^2}{17}$	$24 - x$

⑪ $c = 25$

i	1	2	3	4	5
$f_i(x)$	x	$5,\ x > 13$ $0,\ x \leqslant 13$	$\max\{0, x - 14\}$	$\frac{x^2}{15}$	$\max\{0, 20 - x\}$

⑫ $c = 26$

i	1	2	3	4	5
$f_i(x)$	x	$10,\ x > 15$ $0,\ x \leqslant 15$	$\max\{0, x - 15\}$	$\frac{x^2}{20}$	$\max\{0, 10 - x\}$